Masse suspendue à un ressort, une expérience revisitée.

Un ressort vertical a une extrémité fixe O et une extrémité mobile à laquelle est accrochée une masse ponctuelle M se déplaçant verticalement selon Oz. On note L la longueur et μ la masse linéïque du ressort à vide. A l'équilibre, le poids de la masse M tend le ressort et l'on note $z+\zeta_E(z)$ la position de la spire qui, à vide (en l'absence hypothétique de pesanteur), serait à la cote z. Si l'on coupe par la pensée le ressort à ce niveau, la partie supérieure exerce sur la partie inférieure une force dont le module est donné par la loi de Hooke à savoir :

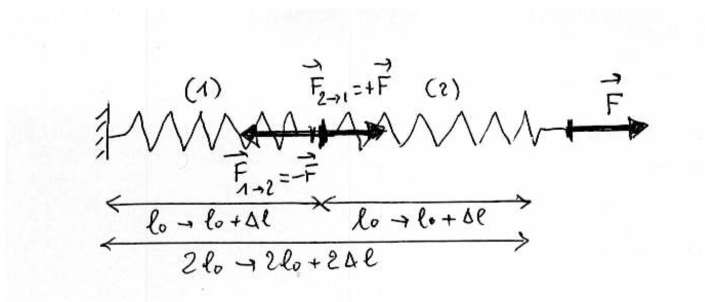
$$F = K\,\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}$$

Question 1 :
Tenter de justifier cette loi, en inventant une loi d'association de ressorts en série.

Considérons un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k ; par définition, sous l'action d'une force de module F, son allongement sera $\Delta\,\ell = F/k$.

Plaçons bout à bout deux ressorts identiques et exerçons à l'extrémité du second une force de module F. Puisque que le second est à l'équilibre, la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle et donc le premier exerce sur le second une force opposée à celle de l'opérateur ; il est donc dans la situation précédente et son allongement est le même. L'allongement total des deux ressorts bout à bout est alors

$$\Delta\,\ell_{total} = 2\,\Delta\,\ell = 2\,F/k$$



Si l'on définit une raideur équivalente par $\Delta\,\ell_{total} = F/k_{eq}$, on en déduit $k_{eq} = k/2$ et comme par ailleurs la longueur à vide est devenue $2\,\ell_0$, on remarque que le produit de la longueur à vide par la raideur est la même pour un ressort et pour deux. Ce résultat se généralise aisément à un nombre quelconque de ressorts et permet d'affirmer que $k\,\ell_0 = Cte$ notée K et d'écrire pour un ressort $F = K\,\Delta\,\ell/\ell_0$

Appliquons ce résultat à une tranche de ressort qui, à vide, serait entre les cotes z et $z+\mathrm{d}z$ et dont la longueur à vide serait $\ell_0 = \mathrm{d}z$. A l'équilibre les cotes des extrémités seraient $z+\mathrm{d}z+\zeta_E(z+\mathrm{d}z)$ et $z+\zeta_E(z)$, la longueur serait donc la différence et en soustrayant la longueur à vide l'allongement serait, à un développement de Taylor près :

$$\Delta\ell = [(z+\mathrm{d}z+\zeta_E(z+\mathrm{d}z)) - (z+\zeta_E(z))] - \mathrm{d}z = \zeta_E(z+\mathrm{d}z) - \zeta_E(z) = \frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z$$

d'où $F = K\,\Delta\,\ell/\ell_0 = K\,\mathrm{d}\zeta_E/\mathrm{d}z$

CQFD.

Question 2 :
Déterminer la fonction $\zeta_E(z)$. On pourra étudier l'équilibre d'une portion élémentaire de ressort puis exploiter les conditions aux limites. En déduire l'allongement du ressort et comparer au résultat classique.

Etudions la tranche de ressort dont les cotes à vide seraient, comme ci-dessus, z et $z+\mathrm{d}z$. Appelons $F(z)$ la tension du ressort au niveau de la spire de cote à vide[1] z, indépendamment de sa position réelle, tension qui est donnée par la loi ci-dessus, à savoir $F(z) = K\,\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}$.

La tranche en question est soumise

– à la tension $F(z+\mathrm{d}z) = K\,\left.\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}\right|_{z+\mathrm{d}z}$ vers le bas au niveau de l'extrémité inférieure

– à la tension $F(z) = K\,\left.\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}\right|_{z}$ vers le haut au niveau de l'extrémité supérieure

– au poids $\mathrm{d}m\,g = \mu\,g\,\mathrm{d}z$ vers le bas

On a donc, à l'équilibre, avec un développement de Taylor :

$$0 = K\,\left.\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}\right|_{z+\mathrm{d}z} - K\,\left.\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}\right|_{z} + \mathrm{d}m\,g = K\,\frac{\mathrm{d}^2\zeta_E}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z + \mu\,g\,\mathrm{d}z \qquad \text{(équation 1)}$$

$$\text{soit} \qquad 0 = \frac{\mathrm{d}^2\zeta_E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mu\,g}{K} \qquad \text{(équation 2)}$$

$$\text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mu\,g}{K}\,z + Cte$$

pour l'extrémité inférieure du ressort, correspondant à $z = L$, la tension du ressort s'oppose au poids de la masse M donc $F(L) = M\,g$ et $\left.\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}\right|_{L} = M\,g/K$ ce qui permet de déterminer la constante d'intégration et

$$\text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z} = \frac{M\,g}{K} + \frac{\mu\,g}{K}\,(L-z)$$

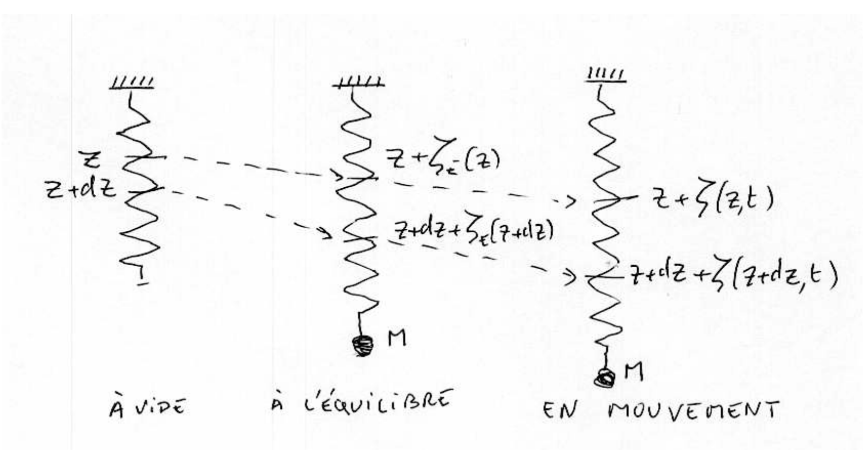
Une seconde intégration avec $\zeta_E(0) = 0$ puisque l'autre extrémité est fixe en z=0 donne

$$\zeta_E(z) = \frac{M\,g}{K}\,z - \frac{\mu\,g}{2\,K}\,(L-z)^2$$

l'allongement du ressort est $\zeta_E(L) = M\,g\,L/K$ qui est le résultat classique car la raideur du ressort est K/L

Question 3 :

On étudie désormais les vibrations du système et l'on note $z+\zeta(z,t)$ la position de la spire qui, à vide, serait à la cote z. Trouver une équation différentielle verifiée par $\zeta(z,t)$. Est-ce une équation de d'Alembert ? On note $f(z,t) = \zeta(z,t) - \zeta_E(z)$; montrer que $f(z,t)$ vérifie une équation de d'Alembert.



[1]Si vous lisez cet exercice après le cours de mécanique des fluides, il s'agit ici d'un point de vue lagrangien car on suit une spire donnée et repérée par sa position initiale.

On reprend le raisonnement qui mène à l'équation 1 à ceci près que le bilan n'est pas nul mais est égal au produit de la masse par l'accélération, d'où :

$$\mu\,\mathrm{d}z\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = K\,\left.\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|_{z+\mathrm{d}z} - K\,\left.\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|_{z} + \mu\,g\,\mathrm{d}z = K\,\frac{\partial^2\zeta_E}{\partial z^2}\,\mathrm{d}z + \mu\,g\,\mathrm{d}z \qquad \text{(équation 3)}$$

$$\text{soit} \qquad \frac{\mu}{K}\,\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} + \frac{\mu\,g}{K} \qquad \text{(équation 4)}$$

qui n'est pas une équation de d'Alembert à cause de la présence d'un terme constant. Si l'on retranche l'équation 2 à l'équation 4, en notant $f(z,t) = \zeta(z,t) - \zeta_E(z)$, on tire aisément :

$$\frac{\mu}{K}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

qui en est une. Notons au passage la démarche classique[2] consistant à retrancher la solution du problème à l'équilibre à celle du problème en mouvement.

La célérité des ondes dans le ressort est donc $c = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$ pour faire apparaître la forme canonique de l'équation :

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Question 4 :
Quelle est la condition imposée à la fonction ζ et donc en f en $z = 0$? On cherche une solution en $f(z,t) = \Phi(z)\,\cos(\omega\,t)$; déterminer, à une constante multiplicative près, $\Phi(z)$ en fonction de z, c et ω.

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Phi''(z)\,\cos(\omega\,t)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2\,\Phi(z)\,\cos(\omega\,t)$$

d'où en reportant dans l'équation de d'Alembert et après simplification par $\cos(\omega\,t)$

$$\Phi''(z) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\,\Phi(z)$$

donc $\phi(z)$ est sinusoïdale de pulsation ω/c. Or, comme on l'a vu plus haut, l'extrémité supérieure du ressort est immobile, ce qui entraîne que $\zeta(0,t)$ donc $f(0,t)$ et $\Phi(0)$ sont nuls et l'on pourra écrire

$$\Phi(z) = A\,\sin\left(\frac{\omega}{c}\,z\right)$$
$$f(z,t) = A\,\sin\left(\frac{\omega}{c}\,z\right)\,\cos(\omega\,t)$$
$$\zeta(z,t) = \frac{M\,g}{K}\,z - \frac{\mu\,g}{2\,K}\,(L-z)^2 + A\,\sin\left(\frac{\omega}{c}\,z\right)\,\cos(\omega\,t)$$

Question 5 :
Quelle est la condition imposée à la fonction ζ en $z = L$? Montrer que ω est solution de : $\tan(\omega\,L/c) = K/(M\,\omega\,c)$ que l'on résoudra graphiquement.

La cote de la masse M et son accélération sont

$$z_M(t) = \zeta(L,t) = \frac{M\,g\,L}{K} + A\,\sin\left(\frac{\omega\,L}{c}\right)\,\cos(\omega\,t)$$

[2] On ne répétera jamais assez qu'une astuce utilisée plusieurs fois devient une méthode.

$$\ddot{z}_M(t) = -\omega^2 A \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t)$$

Cette masse est soumise à son poids de module $M g$ dirigé vers le bas et à la tension du ressort, dirigée vers le haut et de module $T = K \frac{\partial \zeta}{\partial z}(L, t)$. Or

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{M g}{K} + \frac{\mu g}{K} (L - z) + A \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) \cos(\omega t)$$

$$\text{d'où} \qquad T = M g + K A \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t)$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la masse M, donne $M \ddot{z}_M = M g - T$ soit :

$$-M \omega^2 A \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t) = -K A \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t)$$

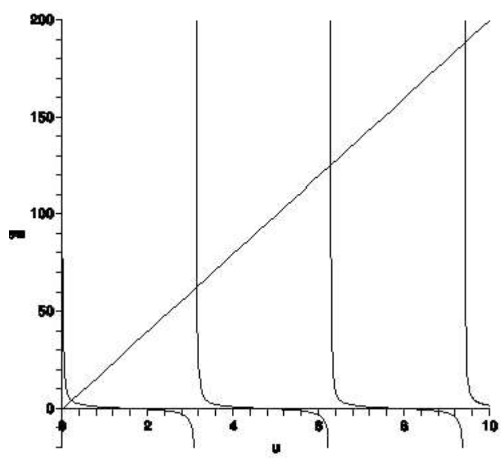
$$\text{d'où} \qquad M \omega \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{K}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)$$

$$\text{et} \qquad \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{K}{M \omega c}$$

dont les solutions donnent les pulsations possibles. L'équation non algébrique se résout graphiquement en posant $u = \omega L/c$ et $a = M c^2/K L = Cte$. L'équation s'écrit

$$\text{cotan}(u) = a u$$

que l'on résout en superposant les graphes des deux membres en fonction de u. Remarquons que $c^2 = K/\mu$ donc $a = M/\mu L$ soit le rapport de la masse M et de la masse du ressort. Ci-dessous les graphes avec $a = 20$ qui correspond à une situation fort plausible.



Question 6 :

On se place dans la situation où a, rapport des masses, est assez grand. On appelle ω_0, ω_1, ω_2, etc. les solutions de cette équation dans l'ordre croissant. Montrer, qu'à part ω_0, on retrouve pratiquement les pulsations des modes propres du ressort s'il avait ses deux extrémités fixes. Chiffrer l'écart en bonne approximation.

Le graphe ci-dessus montre que les valeurs de u solutions de l'équation sont proches, hormis la première, des valeurs qui rendent infinie la cotangente, soit $u_p = \omega_p L/c = p \pi$ d'où $\omega_p = p \pi c/L$, $f_p = p c/2 L$, $\lambda_p = 2 L/p$, valeurs classiques des modes propres.

Posons $u_p = p\,\pi + \varepsilon_p$. Dans l'équation $1/\tan(u) = a\,u$, on a $\tan(u_p) = \tan(\varepsilon_p) \approx \varepsilon_p$ et dans le second membre $u_p \approx p\,\pi$ d'où

$$\frac{1}{\varepsilon_p} = p\,\pi\,a \qquad \text{soit} \qquad \varepsilon_p = u_p - p\,\pi = \frac{1}{p\,\pi\,a}$$

Après multiplication par c/L

$$\omega_p - p\,\pi\,c/L \approx \frac{c}{p\,\pi\,a\,L}$$

$$\omega_p = p\,\pi\,\frac{c}{L}\left(1 + \frac{1}{p^2\,\pi^2\,a}\right)$$

Avec $\pi^2 \approx 10$, $a = 20$, le décalage est de 0,5 % pour le fondamental ($p = 1$), d'un peu plus de 0,1 % pour l'harmonique 2 ($p = 2$), de 0,05% pour l'harmonique 3, etc.

Question 7 :

Pour ω_0, montrer qu'on peut utiliser le développement asymptotique $\mathrm{cotan}(u) = 1/u - u/3$***. Montrer que l'on se ramène à un ressort sans masse accroché à une masse M^* que l'on déterminera.***

Le graphe montre que u_0 est suffisamment petit pour valider le développement proposé d'où

$$\frac{1}{u_0} - \frac{u_0}{3} = a\,u_0$$

$$\frac{1}{u_0} = \left(a + \frac{1}{3}\right)\,u_0$$

$$u_0^2 = \frac{1}{(a + \frac{1}{3})}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c^2}{(a + \frac{1}{3})\;L^2}$$

Reportons-y $c^2 = K/\mu$ et $a = M/\mu\,L$ puis la raideur $k = K/L$ et la masse $m = \mu\,L$ du ressort, alors

$$\omega_0^2 = \frac{K}{\left(\frac{M}{\mu\,L} + \frac{1}{3}\right)\,\mu\,L^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{\left(M + \frac{\mu\,L}{3}\right)\,L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{(M + \frac{m}{3})}$$

Conclusion la formule classique $\omega_0^2 = k/M$ suppose un ressort idéal avec raideur mais sans masse, ce qui est bien sûr impossible ! La conclusion sur la valeur de ω_0 décoiffe, non ?

Question 8 :

Montrer que pour ω_0 le ressort se déforme de façon quasiment homothétique et retrouver le résultat par une méthode énergétique.

On vient de voir que $u \ll \pi$ soit $\omega \ll \pi\,c/l$, $\omega\,L/c \ll \pi$ et a fortiori $\omega\,z/c \ll \pi$. Dans l'expression établie plus haut de $\zeta(z,t)$, on peut donc confondre le sinus et son argument soit

$$\zeta(z,t) = \frac{M\,g}{K}\,z - \frac{\mu\,g}{2\,K}\,(L-z)^2 + A\,\frac{\omega}{c}\,z\,\cos(\omega\,t)$$

Le terme dépendant du temps (allongement à partir de l'équilibre) est bien proportionnel à z. On en déduit

$$\dot{\zeta}(z,t) = -A\,\omega\,\frac{\omega}{c}\,z\,\sin(\omega\,t)$$

en particulier la vitesse V de la masse M est

$$V = \dot{\zeta}(L,t) = -A\,\omega\,\frac{\omega}{c}\,L\,\sin(\omega\,t)$$

d'où par division

$$\dot{\zeta}(z,t) = \frac{V}{L}\,z$$

Si l'on n'avait pas résolu le problème, l'allongement proportionnel à tout instant à z, conduit au même résultat final car $\zeta(z,t) = \zeta_E(z) + k(t)\,z$, $\dot{\zeta}(z,t) = \dot{k}(t)\,z$, $V = \dot{k}(t)\,L$ et par division $\dot{\zeta} = \frac{V}{L}\,z$

En découpant le ressort en petites tranches, son énergie cinétique est

$$\int_0^L \frac{1}{2}\,\mu\,\mathrm{d}z\left(\frac{V}{L}\,z\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mu\,V^2}{L^2}\,\frac{L^3}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu\,L}{3}\,V^2$$

et donc l'énergie cinétique totale masse et ressort est

$$\frac{1}{2}\,(M + m/3)\,V^2$$

et sans qu'il soit besoin de refaire la démonstration classique, on voit qu'il faut ajouter à la masse M le tiers de la masse du ressort. C'est certes plus simple que tout ce qui précède mais la seule façon de justifier la nécessaire hypothèse d'une déformation homothétique est...de faire tout ce qui précède, sinon ce n'est qu'un coup de bluff.